

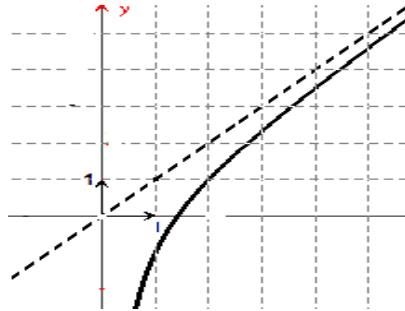
Exercice 1 : (3 points)

Donner la réponse correcte . Aucune justification n'est demandée.

- 1) La courbe (C) ci – dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]0, +\infty[$. La droite Δ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = :$$

- a) 1
b) 0
c) $+\infty$



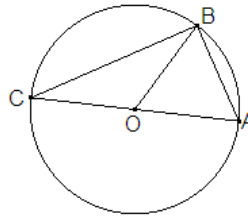
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Dans la figure ci – dessous, (C) est un cercle de centre O milieu de [AC] et B est un point de (C) tel que OAB est un triangle équilatéral.

On pose a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

$$\frac{b-c}{b-a} = :$$

- a) $-2i$
b) $-i$
c) $-i\sqrt{3}$



- 3) Si une suite (U_n) est divergente alors l'une au moins des suites (U_{2n}) ou (U_{2n+1}) est divergente.
a) vrai ; b) faux

Exercice 2 : (3 points)

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

- 1) Dresser le tableau de variation de g sur IR.
2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]1, 2[$.
3) Déterminer le signe de g(x) sur IR.

Exercice 3 : (6 points)

On considère la suite (U_n) défini par $U_0 = 1$ et pour tout entier n ;

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{(1+\sqrt{U_n})^2} .$$

- 1) a) Montrer que pour tout entier n, $U_n > 0$.
b) Montrer que (U_n) est décroissante.
c) Déduire que (U_n) est convergente et détermine sa limite.
2) soit (V_n) défini sur \mathbb{N} par $V_n = \frac{1}{\sqrt{U_n}}$.

iiiiiii) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison égale à 1.

b) On déduit V_n puis U_n en fonction de n et retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$.

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

c) Montrer que $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 4 : (8 points)

Pour tout réel θ de $]-\pi, \pi]$, On considère la fonction f_θ définie par :

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\}$, $f_\theta(z) = \frac{1 + ze^{i\theta}}{e^{i\theta} - z}$.

1) Vérifier que si $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ alors f_θ est constante.

2) On pose $\theta = 0$.

a) Montrer que pour tous nombres complexes z et z' de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$:
 $f_0(z) = z'$ si et seulement si $z = -f_0(-z')$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $f_0(e^{i\alpha}) = \frac{i}{\tan(\frac{\alpha}{2})}$.

c) Déterminer les racines carrées de $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

d) Utiliser les questions a), b) et c) pour résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2.$$

3) On suppose que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par A, B, M et M' les points d'affixes respectives $e^{i\theta}, -e^{-i\theta}, z$ et $z' = f_\theta(z)$

a) Montrer que pour tout $M \neq A$ et $M \neq B$, $(\vec{u}, \widehat{OM'}) \equiv \theta + \pi + (\widehat{MA}, \widehat{MB}) [2\pi]$.

b) Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, déterminer et construire l'ensemble Γ des points M lorsque

M' décrit la demi-droite d'équation : $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$.

Bon Travail

Correction

Exercice 1 : (3 points)

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$ car la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

2) c) $\frac{b-c}{b-a} = \left| \frac{b-c}{b-a} \right| e^{i(\widehat{BA, BC})} = \frac{BC}{BA} e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Or $\frac{BC}{BA} = \frac{BC}{\frac{1}{2}AC} = 2 \frac{BC}{AC} = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Ainsi $\frac{b-c}{b-a} = \sqrt{3} e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i\sqrt{3}$.

3) Faux. Contre exemple : $U_n = (-1)^n$.

(U_n) est divergente mais (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1 .

Exercice 2 : (3 points)

$g(x) = 4x^3 - 3x - 8.$

1) g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $g'(x) = 12x^2 - 3$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0
$g(x)$		-	-7	-	-9

$-\infty \xrightarrow{\quad} -7 \xrightarrow{\quad} -9 \xrightarrow{\quad} +\infty$

2) D'après le tableau de variation de $g : g(x) < 0 \quad \forall x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$, g est continue et strictement croissante donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

De plus $g(1) = -7 < 0$ et $g(2) = 18 > 0$, donc $1 < \alpha < 2$.

3)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Exercice 3 : (6 points)

1) a) Montrons que pour tout entier n , $U_n > 0$.

Pour $n = 0$, $U_0 = 1 > 0$.

Supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$.

Il est clair que si $U_n > 0$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{(1+\sqrt{U_n})^2} > 0$. D'où $U_n > 0 \quad \forall n \geq 0$.

b) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{(1+\sqrt{U_n})^2} < 1$ D'où (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel L tel que

$$L \geq 0 \text{ et } \frac{L}{(1+\sqrt{L})^2} = L \Leftrightarrow 1 + \sqrt{L} = 1 \Leftrightarrow L = 0.$$

2) a) Pour tout entier n , $V_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{U_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{U_n}{(1+\sqrt{U_n})^2}}} = \frac{1+\sqrt{U_n}}{\sqrt{U_n}} = \frac{1}{\sqrt{U_n}} + 1 = 1 + V_n$ donc

(V_n) est une suite géométrique de raison 1.

b) Pour tout entier n , $V_n = V_0 + n = 1 + n$.

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{U_n}} \Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3) $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} U_k - \sum_{k=0}^n U_k = U_{n+1} > 0.$$

D'où (S_n) est croissante.

b) On remarque que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Or $U_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+n}$. Ainsi

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n U_k = U_0 + \sum_{k=1}^n U_k \leq 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} \right)$$

$$\Rightarrow S_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

(S_n) est croissante et $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1} \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc (S_n) converge vers un réel ℓ tel que $0 \leq \ell \leq 2$.

Exercice 4 : (8 points)

1) $f_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \frac{1 + ze^{-\frac{i\pi}{2}}}{e^{-\frac{i\pi}{2}} - z} = \frac{1 - iz}{-i - z} = \frac{i(-i-z)}{-i-z} = i$, $f_{\frac{\pi}{2}}(z) = \frac{1 + ze^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{\frac{i\pi}{2}} - z} = \frac{1 + iz}{i - z} = \frac{i(-i+z)}{i-z} = -i$.

2) Pour $\theta = 0$, $f_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

a) Pour tous z et z' de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, $f_0(z) = z' \Leftrightarrow z' = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow z' - zz' = 1 + z$

$$\Leftrightarrow z(1+z') = z' - 1 \Leftrightarrow z = \frac{z'-1}{z'+1}. \text{ Or } -f_0(-z') = -\frac{1-z'}{1+z'} = \frac{z'-1}{z'+1}.$$

D'où $f_0(z) = z' \Leftrightarrow z = -f_0(-z')$.

b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $f_0(e^{i\alpha}) = \frac{1 + e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}}{-2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{-i \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{i}{\tan \frac{\alpha}{2}}$.

Rq :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$1 + e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}} + e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = \left(e^{\frac{i\alpha}{2}} + e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right) e^{\frac{i\alpha}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}.$$

$$1 - e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = \left(e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}} \right) e^{\frac{i\alpha}{2}} = -2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}.$$

c) Soit $u^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}} \Leftrightarrow u = e^{\frac{i\pi}{8}}$ ou $u = -e^{\frac{i\pi}{8}} = e^{\frac{i9\pi}{8}}$.

d) $(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) (1-z)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{i\pi}{8}}$ ou $\frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{i9\pi}{8}}$
 (d'après 2) c) $\Leftrightarrow f_0(z) = e^{\frac{i\pi}{8}}$ ou $f_0(z) = e^{\frac{i9\pi}{8}} \Leftrightarrow z = -f_0\left(e^{\frac{i\pi}{8}}\right)$ ou $z = -f_0\left(e^{\frac{i9\pi}{8}}\right)$
 (d'après 2) a) $\Leftrightarrow z = -\frac{i}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$ ou $z = -\frac{i}{\tan\left(\frac{9\pi}{8}\right)} = \frac{i}{\tan\frac{\pi}{8}}$ (d'après 2) b)).

3) a) $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}, f_\theta(z) = \frac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} = \frac{e^{i\theta}(e^{-i\theta}+z)}{e^{i\theta}-z} \Leftrightarrow z_{M'} - z_0 = -e^{i\theta} \frac{z - (-e^{-i\theta})}{z - e^{i\theta}}$
 $\Rightarrow \arg(z_{M'} - z_0) \equiv \arg\left[e^{i\theta} \frac{z - (-e^{-i\theta})}{e^{i\theta} - z}\right] [2\pi]$

\Rightarrow Pour tout $M \neq A$ et $M \neq B$, $(\vec{u}, \widehat{OM'}) \equiv \theta + \pi + \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) [2\pi]$

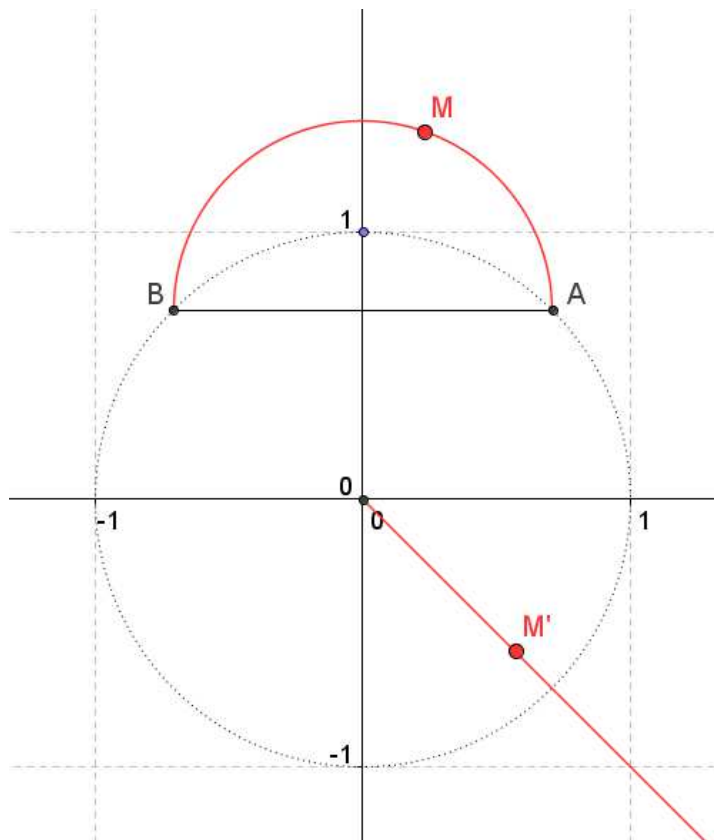
\Rightarrow Pour tout $M \neq A$ et $M \neq B$, $(\vec{u}, \widehat{OM'}) \equiv \theta + \pi + (\widehat{MA}, \widehat{MB}) [2\pi]$.

b) Si $\theta = \frac{\pi}{4}$: $z_A = e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = -e^{-i\theta} = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Si M' décrit la demi-droite d'équation : $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$

alors $(\vec{u}, \widehat{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ et d'après la question précédente,

$(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \pi [2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{2} [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et par suite M appartient au demi cercle de diamètre $[AB]$ privés des points A et B .



Fin